6М

УДК 51 (071)

Л.П. Мироненко
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58, mironenko.leon@yandex.ua

Правило Лопиталя в интегральной форме

L.P. Mironenko
Donetsk National Technical University
Ukraine, 83001, c. Donetsk, Artema st., 58, mironenko.leon@yandex.ua

L'Hopital's Rule in the Integral Form

Л.П. Мироненко
Донецький національний технічний університет, Україна
Україна, 83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58, mironenko.leon@yandex.ua

Правило Лопіталя в інтегральному вигляді

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей в дифференциальном исчислении можно обобщить на интегралы с переменным верхним пределом. В результате такого рассмотрения можно сформулировать некоторый интегральный аналог правила Лопиталя. Формула Лопиталя может быть эффективной для оценки сходимости несобственных интегралов как первого, так и второго рода и позволяет сформулировать достаточно простые и эффективные признаки сходимости несобственных интегралов.
Ключевые слова: интеграл, сходимость, правило Лопиталя, несобственный интеграл, неопределенность.

L'Hopital's rule for an evaluation of indeterminate forms in the differential calculus can be represented in the integral form. In the result of such approach it is possible to formulate and prove an integral analogy of L'Hopital's rule. This approach is allowed to proof the comparison test in the limiting form for improper integrals. Besides, the rule is applied to integrals with a variable upper limit. L'Hopital's formula is suitable for a converging estimation of improper (first and second kinds) integrals and it allowed a possibility to formulate sufficient simple tests of converging and diverging of improper integrals.
Key words: integral, convergence, divergence, L'Hopital's rule, improper integral, uncertainty.

Правило Лопіталя розкриття невизначеностей у диференціальному численні може бути застосовано, а також узагальнено до інтегралів зі змінною верхньою границею. В результаті такого розгляду можливо формулювання і доведення інтегрального аналога правила Лопіталя. Формула Лопіталя в інтегральному вигляді ефективно застосована для оцінки збіжності невластивих інтегралів першого і другого роду і дозволяє сформулювати достатньо прості й эфективні ознаки збіжності і розбіжності невластивих інтегралів у аналітичному вигляді.
Ключові слова: інтеграл, збіжність, розбіжність, правило Лопіталя, невластивий інтеграл, невизначеність.

Введение

Правило Лопиталя в математическом анализе используется для вычисления пределов, содержащих неопределенности вида $\{0/0\}$ и $\{\infty/\infty\}$ [1-3]. Это не единственное его применение. Правило Лопиталя используется при оценке сходимости несобственных интегралов и рядов (числовых и функциональных) [2], [3].

В курсе математического анализа преимущественно используется дифференциальная форма правила: если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки a и дифференцируемы в точке a и $f(a)=g(a)=0,$ то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}. \qquad (1)$$

Формула Лопиталя (1) остается справедливой в случаях как $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, так и при $x\to\infty$ [4], [5].

Правило Лопиталя (1) можно получить в интегральной форме как непосредственно из формулы (1), так из интегральной формулы Коши [6-8].

$$g(\xi)\int_a^b f(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx,\ \xi\in(a,b). \qquad (2)$$

1 Правило Лопиталя в интегральной форме

Возможны три обоснованных подхода введения правила Лопиталя в интегральной форме.

Первый способ.

Проще всего формулу Лопиталя в интегральной форме получить непосредственно из формулы (1). Пусть $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными (интегралы с переменными верхними пределами) функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда для каждого $x\in[a,b]$ определены функции

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\,,\ G(x)=\int_a^x g(t)dt\,. \qquad (3)$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,x]$, то функции $F(x)$ и $G(x)$ дифференцируемы, в частности, в точке $x=a$ [1]. Поскольку

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}G(x)=0,$$

то справедлива формула (1)

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}.$$

Эта формула может быть записана в интегральной форме

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}. \qquad (4)$$

Это есть интегральная форма правила Лопиталя.

Второй способ.

Поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,x]$, то по теореме об интегралах с переменным верхним пределом функции $F(x)$ и $G(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a,x]$ [1]. Для функций $F(x)$ и $G(x)$ выполняется равенство $F(a)=G(a)=0$, поэтому

$$\lim_{x\to a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\big(F(x)-F(a)\big)=\{x=a+\Delta x\}=\lim_{\Delta x\to 0}F(a+\Delta x)-F(a).$$

Остается учесть, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\Delta x}=F'(a)=\lim\limits_{x\to a}F'(x)$.

Повторим эти действия для функции $g(x)$, получим $\lim\limits_{x\to a}\int_a^x g(t)dt = \lim\limits_{x\to a} G'(x)$. Составим отношение (4), получим искомый результат в виде (4).

Третий способ.

Напомним содержание теоремы Коши в дифференциальном исчислении. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале (a,b) и $g'(x)\neq 0$ во всех точках интервала (a,b), то существует точка $\xi\in(a,b)$, такая, что имеет место формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\ . \tag{5}$$

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а функция $G(x)$ является первообразной функции $g(x)$ на $[a,b]$, то, учитывая формулу Ньютона – Лейбница $F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(x)dx$, $G(b)-G(a)=\int\limits_a^b g(x)dx$ и $F'(\xi)=f(\xi)$, $G'(\xi)=g(\xi)$, формула (5) примет вид $\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, откуда следует интегральный аналог формулы Коши [7].

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)},\ \xi\in(a,b).$$

Здесь функция $g(x)\neq 0$ не меняет знак на отрезке $[a,b]$.

Пусть $b=x$, а функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Тогда формула Коши примет вид

$$\frac{\int_a^x f(x)dx}{\int_a^x g(x)dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)},\ \xi\in(a,x).$$

Переходя в равенстве к пределу $x\to a$, заметим, что $\xi\to a$ и в результате получим формулу (4).

Примеры.

Первый стандартный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos x dx}{\int_0^x dx} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1} = 1.$

Второй стандартный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^x dx}{\int_0^x dx} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1} = 1.$

2 Признаки сходимости несобственных интегралов

В математическом анализе хорошо известны признаки сходимости несобственных интегралов, из которых нас будут интересовать признаки сравнения, а точнее, признак сравнения в предельной форме. Этот признак основан на сравнении заданного несобственного интеграла с заведомо известными, в смысле сходимости, интегралами [3-5].

Обычно исследуемый на сходимость несобственный интеграл первого рода $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сравнивают с интегралами $\int_a^{+\infty} g(x)dx,\ g(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$, которые ведут себя следующим образом:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\alpha>1-\textit{сходится}\\ \alpha\le 1-\textit{расходится}.\end{cases} \tag{6}$$

Аналогично рассматриваются несобственные интегралы второго рода $\int_a^{b} g(x)dx,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$:

$$\int_0^{1}\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\alpha<1-\textit{сходится}\\ \alpha\ge 1-\textit{расходится}.\end{cases} \tag{7}$$

Применим формулу (4) в случае несобственных интегралов первого рода, положив $a=+\infty$, а в качестве функции $g(x)$ выберем степенную функцию $g(x)=1/x^\alpha$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{+\infty}^{x} f(t)dt}{\int_{+\infty}^{x} g(t)dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\int_{x}^{+\infty} f(t)dt}{-\int_{x}^{+\infty} g(t)dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{x}^{+\infty} f(t)dt}{\int_{x}^{+\infty} dt/t^\alpha}. \tag{8}$$

Ограничимся случаем $\alpha>1$, тогда интеграл в знаменателе сходится, т.е. имеет конечное значение. С другой стороны, при $x\to+\infty$ промежуток интегрирования неограниченно уменьшается, поэтому знаменатель стремится к нулю. То же самое происходит с интегралом в числителе, если он сходится. В результате имеем неопределенность $\{0/0\}$, к которой применимо правило Лопиталя (4).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{x}^{+\infty} f(t)dt}{\int_{x}^{+\infty} dt/t^\alpha}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_{x}^{+\infty} f(t)dt\right)'_x}{\left(\int_{x}^{+\infty} dt/t^\alpha\right)'_x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{x^\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}x^\alpha f(x). \tag{9}$$

На основании признака сравнения делаем заключение: *если существует конечный предел* (9) *и такое* $\alpha>1$*, что выполняется условие* $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha f(x)<\infty$*, то интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Кратко:

$$\exists\alpha>1,\exists\lim_{x\to+\infty}x^\alpha f(x)<\infty-\textit{сходится}. \tag{10}$$

Этой форме можно придать другой вид, заметив, что при $\alpha>1$ и $f(x)\to 0$ – необходимое условие сходимости, имеем неопределенность $\{\infty\cdot 0\}$. В этом случае $f^{-1}(x)=\varphi(x)\to\infty$ и неопределенность может быть преобразована к виду $\{\infty/\infty\}$. Применим правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{x}^{+\infty} f(t)dt}{\int_{x}^{+\infty} dt/t^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}x^\alpha f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\varphi(x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\alpha\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{\varphi'(x)}.$$

Признак сходимости (10) интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ примет вид

$$\exists\beta > 0, \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\beta}}{\varphi'(x)} < \infty, \varphi(x) = 1/f(x) - \textit{сходится}. \quad (11)$$

Даже если интеграл в числителе дроби (9) расходится, то правило Лопиталя остается в силе. Потому, что следует считать $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} f(t)dt = 0$, поскольку формально для первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ имеем равенство $\lim_{x\to+\infty}\{F(+\infty) - F(x)\} = 0$.

Итак, при любых возможных поведениях подынтегральной функции $f(t)$ в интеграле $\int_x^{+\infty} f(t)dt$ дробь (8) имеет неопределенность $\{0/0\}$ и правило Лопиталя применимо.

Замечание 1. В случае, когда пределы (10) или (11) равны бесконечности или не существуют, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Замечание 2. Если окажется, что предел (11) имеет неопределенность $\{\infty/\infty\}$, то правило Лопиталя можно применить повторно

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\beta}}{\varphi'(x)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \beta \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{\varphi''(x)} \text{ и т.д.}$$

Применим формулу (4) в случае несобственных интегралов второго рода, т.е. когда $f(a) = \infty$, а в качестве функции $g(x)$ выберем $g(x) = 1/(x-a)^{\alpha}$. Как для интегралов первого рода, имеют место те же свойства интегралов $\int_a^x f(t)dt$ и $\int_a^x g(t)dt$. Отличие состоит в том, что обе функции $f(x)$ и $g(x)$ терпят разрывы при $x = a$. Подобные рассуждения, как для функций $f(x)$ и $g(x)$ в случае интегралов первого рода, приводят к неопределенности $\{0/0\}$. Здесь также промежутки интегрирования стремятся к нулю, что позволяет применить правило Лопиталя. В результате имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt} = \lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x dt/(t-a)^{\alpha}} = \lim_{x\to a}\frac{\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x}{\left(\int_a^x dt/(t-a)^{\alpha}\right)'_x} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/(x-a)^{\alpha}} = \lim_{x\to a}(x-a)^{\alpha} f(x). \quad (12)$$

На основании признака сравнения делаем заключение: *если существует конечный предел* (12)*, при этом* $\alpha < 1$*, то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится.*

Кратко:

$$\exists\alpha < 1, \exists \lim_{x\to+\infty}(x-a)^{\alpha} f(x) < \infty - \textit{сходится}. \quad (13)$$

Этой форме можно придать другой вид, заметив, что, при $\alpha < 1$ и $f(x) \to \infty$, имеем неопределенность $\{0\cdot\infty\}$. В этом случае $f^{-1}(x) = \varphi(x) \to 0$ и имеем $\{0/0\}$. Применим правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)^{\alpha}}{\varphi(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \alpha \lim_{x\to a}\frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\varphi'(x)}.$$

Признак сходимости (13) интеграла $\int_a^b f(x)dx$ примет вид

$$\exists\beta > 0, \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\beta}}{\varphi'(x)} < \infty, \varphi(x) = 1/f(x) - \textit{сходится}. \qquad (14)$$

Как в случае несобственных интегралов первого рода, имеют место *замечания 1* и *2*.

Примеры.

Несобственный интеграл первого рода $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-2} = 0,\ 1 < \alpha < 2.$$

Интеграл сходится.

Несобственный интеграл второго рода $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}} dx$.

$$\lim_{x\to b} (x-b)^{\alpha} f(x) = \lim_{x\to 1} (1-x)^{\alpha+1/2} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to 1} (1-x)^{\alpha+1/2} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{(\ln(1-x))'}{(1-x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1} (1-x)^{\alpha+1/2} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} = \lim_{x\to 1} (1-x)^{\alpha-1/2} = 0,\ \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

Интеграл сходится.

Наши признаки записаны в предельной форме и могут применяться к интегралам, к которым применяют признаки сравнения в конечной форме. Покажем это на примере. Интеграл $\int_2^{+\infty} dx/\ln x$ расходится по признаку сравнения с интегралом $\int_2^{+\infty} dx/x$, поскольку $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ при $x > 1$. Но, если мы не знаем, какой интеграл следует взять в качестве сравнения, работаем сразу по формуле (11):

$$\frac{\int_2^{+\infty} dx/\ln x}{\int_2^{+\infty} dx/x^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} \frac{1}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1} \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = \infty\ \forall\alpha > 1.$$

Интеграл расходится.

Вместе с тем, признаки в предельной форме имеют непреодолимые ограничения, которые демонстрируем примерами.

$$\frac{\int_2^{+\infty} dx/x\ln x}{\int_2^{+\infty} dx/x^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1} \frac{1}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-2} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-2} \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1} = \infty\ \forall\alpha > 1.$$

Интеграл расходится. К такому же результату придем, рассматривая сходящийся интеграл $\int_2^{+\infty} dx / x\ln^2 x$. В самом деле, данный интеграл легко вычисляется:

$$\int_2^{+\infty} dx / x\ln^2 x = \int_2^{+\infty} d(\ln x) / \ln^2 x = -\left.\frac{1}{\ln x}\right|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Объясняется этот факт тем, что скорость изменения степенной функции и логарифмической функции различается в бесконечное число раз в относительном смысле. Это проявляется при применении правила Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to+\infty} x = \infty.$$

Это говорит о том, что при применении правила Лопиталя для оценки сходимости интегралов следует обращать внимание на относительную скорость сходимости сравниваемых интегралов.

Выводы

В работе рассмотрено обоснование правила Лопиталя в интегральной форме. При этом

1. Предложены три способа обоснованного введения правила Лопиталя в интегральной форме, а именно: 1) непосредственно из правила Лопиталя в дифференциальной форме; 2) подобно выводу правила Лопиталя в дифференциальном исчислении; 3) как следствие интегральной теоремы Коши о среднем.

2. С помощью правила Лопиталя в интегральной форме строго обоснован предельный признак сравнения. Обоснование дано в виде рассуждения, определяемого равенствами (9). В математическом анализе обычно сравнение интегралов сразу начинается со сравнения подынтегральных функций, а строгого обоснования перехода от отношения интегралов к отношению подынтегральных функций нет.

3. С помощью правила Лопиталя в интегральной форме получены новые формы записи предельных признаков в виде (11) и (14). Эти новые признаки могут практически быть использованы на равных правах с признаками (10) и (13).

4. В нашем подходе имеется значительное преимущество, когда не ясно, какую функцию следует брать в качестве сравнения. Наличие параметра α в формулах (10) – (13) снимает эту проблему полностью и позволяет применять признаки формально.

5. Критерии сходимости несобственных интегралов, полученные в данной работе, имеют также практический характер и просты в употреблении, поэтому могут быть использованы в учебном процессе, в научных исследованиях.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Том I / Кудрявцев Л.Д. – М. : Наука, 1970. – 571 с.
2. Ильин В.А. Основы математического анализа. Том 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М. : Изд-во ФМЛ, 1956. – 472 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2 / Фихтенгольц Г.М. – М. : Наука, Изд-во ФМЛ, 1972. – 795 с.
4. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. Vol. 1 / Apostol T.M. – John Wilay and Sons, Inc., 1966. – 667 p.

5. Wrede R. Theory and Problems of Advanced Calcolus / R. Wrede, M. Spiegel. – Schaum's Series, The MacGraw-Hill Companies Inc., 2002 (First Edition 1966). – 433 p.
6. Мироненко Л.П. Интегральная форма теоремы Лагранжа и ее применение к определенному интегралу / Мироненко Л.П., Прокопенко Н.А. // Сборник научно-методических работ. Вып. 6. – Донецк, 2009. – С. 119-126.
7. Мироненко Л.П. Интегральные теоремы о среднем. Подход, основанный на свойствах интегральной меры / Л.П. Мироненко, И.В. Петренко, О.А. Рубцова // Искусственный интеллект. – 2010. – № 4. – С. 617-622.
8. Мироненко Л.П. Простой способ доказательства теоремы о среднем в интегральном исчислении / Л.П. Мироненко, О.А. Рубцова, Т. Табаленкова // Материалы региональной студенческой конференции «Математическая культура инженера». – Донецк, 2010. – С. 233-237.

Literatura

1. Kudryavtsev L.D. Matematichesky Analiz. Tom 1., Nauka, 1970 – 571 s.
2. Iliyn V.A., Pozdnyak E.G. Osnovy matematicheskogo analiza. Tom 1. - M.: Izd-vo FML, Moskwa, 1956. -472 s.
3. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsialnogo i integralnogo isccisleniya. Tom 1, - M.: Izd-vo FML, Moskwa, 1972. -795 s.
4. 4. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. Vol 1. – John Wilay and Sons, Inc., 1966, 667 with.
5. 5. Wrede R., Spiegel M. Theory and Problems of Advanced Calcolus. – Schaum's Series, The MacGraw-Hill Companies Inc. 2002 (First Edition 1966), 433.
6. Mironenko, Prokopenko. Sbornik nauchno-metodicheskikh rabot. Vip.6 - Donetsk, 2009 S. 119- 126.
7. Mironenko, Petrenko, Rubtsova. Iskusstvennyj intellect. 2010. № 4. S. 617- 622.
8. Mironenko, Rubtsova, Tabalenkova. Materialy regionalnoy studencheskoy konferentsii, Donetsk -2010. S. 233- 237.

RESUME

L.P. Mironenko

L'Hopital's Rule in the Integral Form

L'Hopital's rule for an evaluation of indeterminate forms in the differential calculus can be represented in the integral form. In the result of such approach it is possible to formulate and prove an integral analogy of L'Hopital's rule. This approach is allowed to proof the comparison test in the limiting form for improper integrals. Besides, the rule is applied to integrals with a variable upper limit. L'Hopital's formula is suitable for a converging estimation of improper (first and second kinds) integrals and it allowed a possibility to formulate sufficient simple tests of converging and diverging of improper integrals.

Let $F(x)$ and $G(x)$ be primitives of the functions $f(x)$ and $g(x)$ at the interval $[a,b]$. Then, for each $x\in[a,b]$ the functions $F(x)=\int_a^x f(t)dt$,$G(x)=\int_a^x g(t)dt$ are defined [1]. If the functions $f(x)$ and $g(x)$ are continuous at the interval $[a,x]$, then the functions $F(x)$ and $G(x)$ are differentiable, as a case, at the point $x=a$ and $\lim\limits_{x\to a}F(x)=\lim\limits_{x\to a}G(x)=0$. The conditions are sufficient to have the equality [2]

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}.$$

This is the integral form of L'Hopital's rule.

An applying this rule to solve the problem of a convergence of improper integrals gives a new test of a comparison

Briefly $\exists\alpha < 1, \exists \lim\limits_{x\to+\infty} (x-a)^{\alpha} f(x) < \infty$ *convergence* (1)

This form of the comparison test can be represented in the other form. Notice, that at $\alpha < 1$ and $f(x) \to \infty$ at $x \to \infty$ we have an indeterminate form $\{0\cdot\infty\}$ which can be transformed to $\{0/0\}$, if to denote $f^{-1}(x) = \varphi(x) \to 0$. Iin that case L'Hopital's rule can be applied,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} f(t)dt}{\int_x^{+\infty} dt/t^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{\varphi(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \alpha \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\varphi'(x)} .$$

Thus, the comparison test (1) for the integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ has the form

$$\exists\beta > 0, \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\beta}}{\varphi'(x)} < \infty, \varphi(x) = 1/f(x) \quad \textit{convergence} \quad (2)$$

The similar tests of a convergence to (1) and (2) take place for improper integrals $\int_a^b f(x)dx$ of the second kind when $f(x) \to \infty$ at $x \to a$. Namely

$$\exists\alpha < 1, \exists \lim_{x\to+\infty} (x-a)^{\alpha} f(x) < \infty \quad \textit{convergence}$$

$$\exists\beta > 0, \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\beta}}{\varphi'(x)} < \infty, \varphi(x) = 1/f(x) \quad \textit{convergence}$$

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.